

Durée: 1h

Interrogation de Mathématiques

C K N I

classe T^{le}D

(30-5-03)

Exercice 1: (4 points)

On définit deux suites réelles (u_n) et (v_n) par:

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$;

$v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n .

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est une suite stationnaire.

3. Dédurre l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .

Exercice 2: (6 points)

Soit (x_n) et (y_n) les deux suites réelles définies par $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} x_n = x_{n-1} - y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases}$$

Soit (z_n) la suite complexe définie par: $z_n = x_n + iy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = (1+i)z_{n-1}$

b) Calculer z_n en fonction de n et mettre z_n sous la forme trigonométrique

c) En déduire les expressions de x_n et de y_n en fonction de n .

3. On pose:

$$S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$$

$$A_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$S'_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

Calculer S_n, A_n puis S'_n en fonction de n .