UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2009
Session normale
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, unité graphique 2 cm.
Soient les points $A(-2;1;-4)$; $B(2;3;1)$; $C(2;2;-1)$ et $D(-3;-1;3)$
Soient les points E, F, G et H tel que $ABFCDEGH$ soit un parallélépipède.

1) Déterminer les coordonnées du point F.

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme $A\ B\ F\ C$ et du triangle $A\ B\ C$ en cm^2.

3) Calculer la distance d du point D au plan $(A\ B\ C)$.

4) Calculer en cm^3 le volume V de la pyramide de sommet D et de base $A\ B\ F\ C$.

5) Calculer le volume V' du parallélépipède $A\ B\ F\ C\ D\ E\ G\ H$.

Exercice 2 : 4 points

Le tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Montant des prêts en millions de francs CFA y	4,5	5	5,2	5,8	6,3	7,1

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.
On prendra 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour un million en ordonnée.

2) Soit (Δ) la droite d'ajustement de Mayer obtenue par regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage.
Soit G_1 le point moyen des trois premiers points et G_2 celui des trois derniers points du nuage.
a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.
b) Construire la droite (Δ).

c) Déterminer l'équation réduite de (Δ).

3) On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même au cours des années à venir.
A partir de quelle année le montant des prêts sera-t-il strictement supérieur au double de celui de 2009 ?

Problème : 12 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 2 cm).

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi\,;0[$ par $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi\,;0[$ et que $g'(x) = -\sin x\,(2\cos x + 1)$.
b) En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right]$ et que
$g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$
c) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \,]-\pi\,;0[$ et que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right[$.
b) En déduire le signe de g sur $]-\pi, 0[$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \,]-\pi\,;0] \\ f(x) = 2 - \dfrac{3}{e^{3x}+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
b) Montrer que pour tout $x \in \,]-\pi\,;0[$ on a : $f(x) = \frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = +\infty$
c) En déduire les asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
b) Montrer que $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$ pour tout $x \in]-\pi, 0[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]-\pi, 0[$.
c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi\,;+\infty[$.

5) Construire $(\mathcal{C}_f)$, ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C

On admet que pour tout $x \in [1{,}5\,;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ $\qquad (e)$

1) Soit h la fonction définie sur $[1{,}5\,;\ 2]$ par $h(x) = f(x) - x$
Etudier les variations de h et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\,;\ 2]$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1{,}5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\,;2]$ en utilisant (e).
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ et que
$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

On donne : $h(1{,}5) \simeq 0{,}46$ $\qquad h(2) \simeq -0{,}007$
$\ln 10 = 2{,}30$ $\qquad \ln(2) = 0{,}69$

Fin