UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2009
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : 4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t(3-t^2) \\ y(t) = t\ln\left(\dfrac{3+t}{3-t}\right) \end{cases} \quad t \in [-2;2]$$

1) Comparer $M(t)$ et $M(-t)$ pour $t \in [-2;2]$ et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (Γ) à $[0;2]$.

2) Etudier le sens de variation de x sur $[0;2]$

3) a) Montrer que pour tout $t \in [0;2]$, $\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \geq 0$
   b) Etudier le sens de variation de y sur $[0;2]$.

4) Dresser le tableau de variations conjoint de x et y.

5) Déterminer les points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

6) Tracer (Γ).

On donne : $\ln 5 \simeq 1{,}60$; $\ln 2 \simeq 0{,}69$; $\ln(2+\sqrt{3}) \simeq 1{,}31$; $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.

Exercice 2 : 4 points

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -2i\ ;\ z_B = 4-2i\ ;\ z_C = 4+2i\ ;\ z_D = 1.$$

1) a) Placer les points A, B, C et D.
   b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature exacte du triangle ABC

2) On désigne par f l'application qui à tout point $M \neq A$ d'affixe z de P associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$.
   a) Déterminer les images B' et C' des points B et C par f.
   b) Ecrire l'affixe $z_{B'}$ de B' sous forme trigonométrique.
   c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$

3) a) Montrer que pour tout complexe z distinct de $-2i$, $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$.
   b) Montrer que pour tout point $M \neq A$.

   i) $M' \neq D$.
   ii) $DM' \times AM = 4\sqrt{2}$.
   iii) $mes\left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) + mes\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

<u>Problème</u> : 12 points

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).

<u>Partie A</u> Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;\,+\infty[$ et que $1,14 < \alpha < 1,15$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant la valeur de x.

<u>Partie B</u>

1) a) Montrer que pour $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(x\,e^x+1)^2}$
   b) En déduire le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.
   b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A) 2)** donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude de 10^{-2}.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

5) a) Etablir que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$

$f(x) = x + \frac{(x+1)\,u(x)}{x\,e^x+1}$ avec $u(x) = e^x - x\,e^x - 1$

b) Etudier le sens de variation de la fonction u sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des résultats précédents la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T)

Partie C

1) Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
On pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B) 2)**.

2) On note D le domaine délimité par $(\mathcal{C})$; (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D.

3) Pour tout entier naturel n on pose $V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) Calculer V_0, V_1, et V_2.

b) Interpréter graphiquement V_n.

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

En déduire que pour tout $n \geq 2$, $V_{n+1} \leq V_n$.

d) Déterminer la limite de (V_n).

On donne : $e \simeq 2,72$; $e^{1,14} \simeq 3,12$; $e^{1,15} \simeq 3,16$.

Fin