CORRIGÉ BEPC 1998

Activités Numériques

Exercice 1

1°) Développement et réduction

$f(x) = (2x+1)^2 - (-x+3)^2$

$= 4x^2 + 4x + 1 - (x^2 - 6x + 9)$

$= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9$

$\underline{f(x) = 3x^2 + 10x - 8}$

$g(x) = x^2 - 16 - (2x+8)(-2x+1)$

$= x^2 - 16 - (-4x^2 + 2x - 16x + 8)$

$= x^2 - 16 + 4x^2 - 2x + 16x - 8$

$\underline{g(x) = 5x^2 + 14x - 24}$

2°) Factorisation de f(x) et g(x)

$f(x) = (2x+1)^2 - (-x+3)^2$

$= [(2x+1) + (-x+3)][(2x+1) - (-x+3)]$

$= (2x+1-x+3)(2x+1+x-3)$

$\underline{f(x) = (x+4)(3x-2)}$

$g(x) = x^2 - 16 - (2x+8)(-2x+1)$

$= x^2 - 4^2 - (2x+8)(-2x+1)$

$= (x+4)(x-4) - 2(x+4)(-2x+1)$

$= (x+4)[(x-4) - 2(-2x+1)]$

$= (x+4)(x-4+4x-2)$

$\underline{g(x) = (x+4)(5x-6)}$

3°) Résolution dans $\mathbb{R}$ de :

a) $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+4)(3x-2) = (x+4)(5x-6)$

$\Leftrightarrow (x+4)(3x-2) - (x+4)(5x-6) = 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+4)[(3x-2) - (5x-6)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(3x-2-5x+6) = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(-2x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x+4 = 0$ ou $-2x+4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 2$

$\underline{S = \{-4 ; 2\}}$

b) $f(x) \geq 0$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x-2) \geq 0$

$x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

$3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\underline{S =]-\infty ; -4] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty[}$

Exercice 2

$k(x) = |x+2| - |1-2x|$

1°) Expressions de k(x) sans le signe de la valeur absolue.

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ si } x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ \qquad \Leftrightarrow x \in [-2 ; +\infty[\\ -x-2 \text{ si } x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \\ \qquad \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -2] \end{cases}$$

De même, on a :

$$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x \text{ si } 1-2x \geq 0 \mapsto x \leq \frac{1}{2} \\ \qquad \mapsto x \in]-\infty; \frac{1}{2}] \\ -1+2x \text{ si } 1-2x \leq 0 \mapsto x \geq \frac{1}{2} \\ \qquad \mapsto x \in [\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$$

Tableau de valeur absolue

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0 $x+2$	$x+2$	
$\lvert 1-2x\rvert$	$1-2x$	$1-2x$	0 $-1+2x$	
$k(x)$	$x-3$	-5 $3x+1$	$\frac{5}{2}$ $-x+3$	

Conclusion :

$$k(x) = \begin{cases} x-3 \text{ si } x \in]-\infty; -2[\\ 3x+1 \text{ si } x \in [-2; \frac{1}{2}[\\ -x+3 \text{ si } x \in [\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$$

2°) Représentation graphique de k

- Pour $x \in]-\infty; -2[$, $k(x) = x-3$

Ainsi pour $x = -4$ on a :

$$y = k(-4) = -4-3 = -7$$

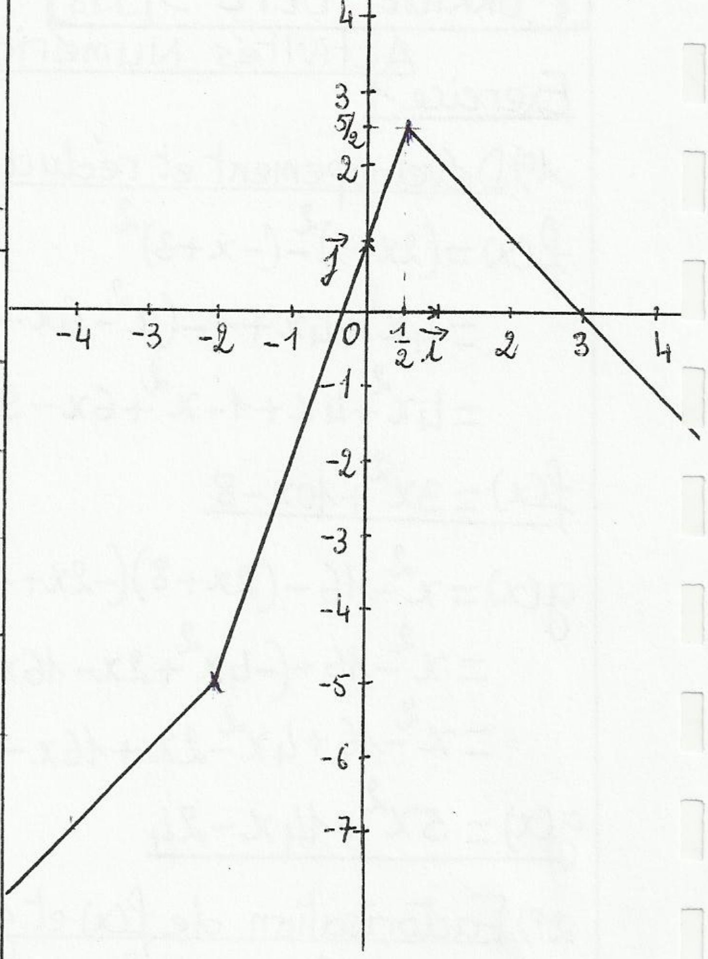
- Pour $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, $k(x) = -x+3$

ainsi pour $x = 2$ on a :

$$y = k(2) = -2+3 = 1$$

On obtient le tableau suivant :

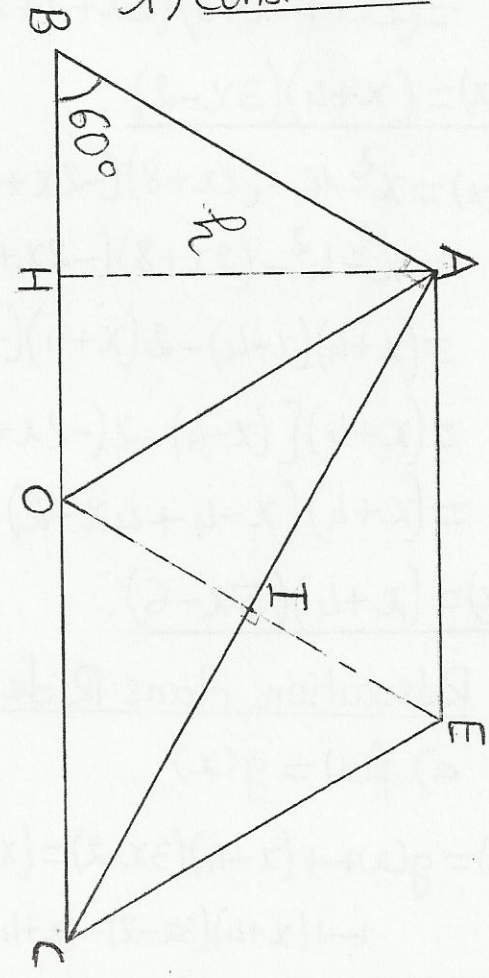
x	-4	-2	$\frac{1}{2}$	2
y	-7	-5	$\frac{5}{2}$	1



Activités Géométriques

Exercice 1

1°) Construction



2) Démontrons que (OI) // (AB)

ABC est rectangle en A et O est milieu de [BC] l'hypothénuse. Ainsi O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc OA = OC. Et le triangle AOC est isocèle en O.

Par suite la bissectrice de $\widehat{AOC}$ est aussi la médiatrice de [AC] d'où (OI) ⊥ (AC).

On a : (OI) ⊥ (AC) et (AB) ⊥ (AC) donc (OI) // (AB).

3) Démontrons que mes $\widehat{AOI}$ = mes $\widehat{ABC}$

(AB) // (OI) et (AO) est une sécante.

Les angles $\widehat{AOI}$ et $\widehat{ABC}$ sont alternes-internes donc mes $\widehat{AOI}$ = mes $\widehat{ABC}$

4) Nature du quadrilatère AOCE

Comme (OI) est aussi la médiatrice de [AC], on a : I milieu de [AC] et I milieu de [OE] car $E = S_{(AC)}(O)$.

I est à la fois milieu de [AC] et [OE] donc AOCE est un parallélogramme.

De plus (OI) ⊥ (OE) et AO = OC

On conclut que :

AOCE est un losange.

5) Démontrons que AECB est un trapèze isocèle

AOCE étant un losange, on a :

- d'une part : (AE) // (OC) ⟼ (AE) // (BC)

donc AECB est un trapèze.

- d'autre part : AO = OC = OB et Comme $\widehat{ABC} = 60°$, le triangle ABO est équilatéral. Ainsi AB = AO = EC

On conclut que :

AECB est un trapèze isocèle.

La valeur exacte de l'aire de AECB

$$\mathcal{A} = \frac{(BC+AE)\times h}{2}$$

Déterminons h = AH

Le triangle ABO étant équilatéral

on a : $h = \frac{AB\times\sqrt{3}}{2} \longmapsto h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Ainsi : $\mathcal{A} = \frac{(12+6)\times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{18\times 3\sqrt{3}}{2}$

$$\mathcal{A} = 27\sqrt{3}\ cm^2$$

Exercice 2

1) figure voir page suivante.

Montrons que le triangle ABC est rectangle.

On a : $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \longmapsto \vec{AB}\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ -1-3 \end{pmatrix}$

$\longmapsto \vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \longmapsto \vec{BC}\begin{pmatrix} 8-0 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$

$\longmapsto \vec{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

On a : $2\times8+(-4)\times4=16-16=0$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux d'où le triangle ABC est rectangle en B.

2) <u>Diamètre du cercle $\mathcal{C}$</u>

$\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Comme ABC est rectangle en B alors $\mathcal{C}$ a pour diamètre l'hypothénuse [AC].

3) <u>Ordonnée de E</u>

$E(-2;y)$.

B, C, E sont alignés ssi $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-2-0\\y-(-1)\end{pmatrix}\mapsto\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-2\\y+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ colinéaires entraine que :

$8(y+1)-4\times(-2)=0\mapsto 8y+8+8=0$

$\mapsto 8y=-16$

$\mapsto y=-\frac{16}{8}=-2$

On a : <u>$E(-2;-2)$</u>

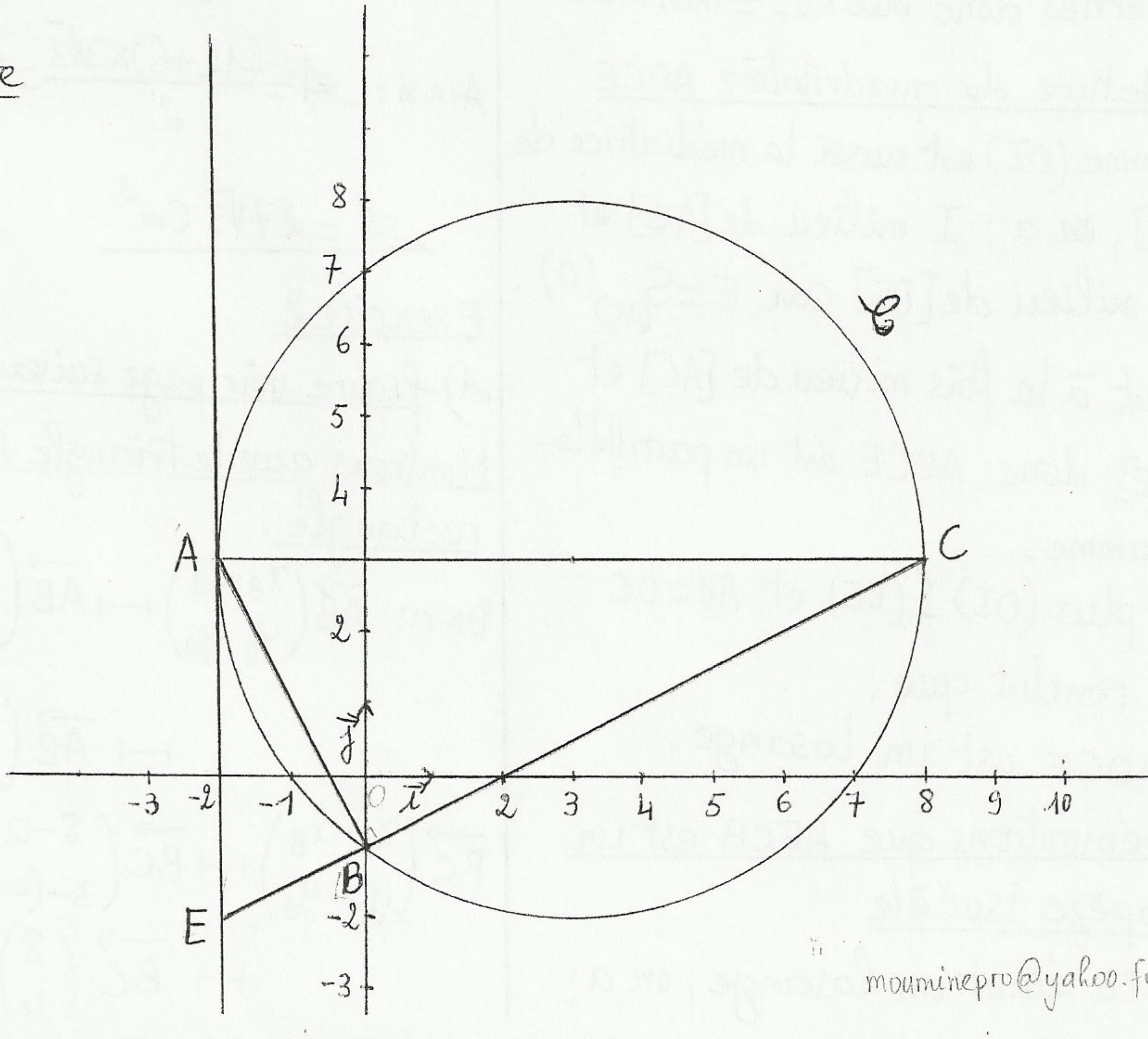
4) <u>Montrons que (AE) est tangente à $\mathcal{C}$</u>

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8-(-2)\\3-3\end{pmatrix}\mapsto\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2-(-2)\\-2-(-3)\end{pmatrix}\mapsto\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

On a : $10\times0+0\times1=0+0=0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux d'où $(AC)\perp(AE)$. Par suite (AE) est tangente à $\mathcal{C}$ en A. ∎

<u>Figure</u>



moumine.pro@yahoo.fr